

Projektskizze zu einer genaueren Messung von G
Wolfgang Jacoby, Mainz

Die Gravitationskonstante G ist bislang nicht sehr genau bestimmt.

Nach dem National Institution of Standards and Technology, DODATA Empfehlung 2002 beträgt

$G = 6.6742 \pm 0.001 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Gründe sind die relativ kleinen Massen, die in Experimenten benutzt werden können, und der sehr kleine Wert von G

Eine Möglichkeit zur genaueren Bestimmung wäre die Vermessung eines marinen Vertikalprofils von Schwere und Tiefe, bzw. Druck. Dabei nutzt man aus, dass der Effekt Δg_w der Bouguer-Platte aus Wasser zwischen einer Messung "oben" und einer "unten" so genau bekannt ist wie die Tiefendifferenz Δz , die wiederum sehr genau als Wasserdruck-Differenz Δp bestimmt werden kann. Beide enthalten das Produkt $\rho \Delta z$, das sich daher im Quotienten $\Delta g_w / \Delta p$ herauskürzt. Die Unsicherheiten dieses Produkts, die aus der direkten Messung von z und der Wasserdichte folgen, werde zu relativ 10^{-3} geschätzt.

Gemessen: Δz , Δg , Δp , g

$$\Delta g_w = 4\pi G \rho_w \Delta z, \Delta p = g \rho_w \Delta z \quad \Delta g_w / \Delta p = 4\pi G / g \quad G = \Delta g_w / \Delta p \times g / 4\pi$$

Zum Beispiel folgt aus den Messwerten $\Delta g_w / \Delta p \approx 8.58 \times 10^{-11} \text{ ms}^{-2} / \text{Pa} \leftrightarrow 8.58 \cdot 10^{-6} \text{ mGal} / \text{Pa}$

$$G = 8.58 \cdot 10^{-11} \times 9.81 / 4\pi \approx 6.698 \cdot 10^{-11} \text{ MKS}$$

Allerdings misst man nicht Δg_w sondern $\Delta g = g_2 - g_1$, welches noch die Schwerezunahme (nach unten) $\Delta g_z \approx \Delta z \times 0.3086 \text{ mGal/m}$ im globalen Schwerefeld enthält. Sowohl Δz als auch der Normalgradient enthalten

Unsicherheiten. Das erfordert eine zusätzliche unabhängige Messung von z oder Δz und eine Abschätzung des regionalen oder lokalen, möglichst genauen Wertes von $\partial g_n / \partial z$.

Das Problem sind vor allem diese Fehlerquellen, welche die Genauigkeit der Bestimmung von G begrenzen.

Ziel ist es, die Fehlerquellen systematisch und sorgfältig zu analysieren, die erreichbare Genauigkeit der G-Bestimmung abzuschätzen und möglichst zu verbessern.

In $G = \Delta g / \Delta p \times g / 4\pi$ stehen drei Messgrößen: g, Δg_w , Δp . Während die Messung von g und p, bzw. Δg und Δp mit relativer Genauigkeit von 10^{-8} bis 10^{-9} , bzw. 10^{-5} bis 10^{-6} möglich ist, stellt der Normalgradient vermutlich die größte Fehlerquelle dar. Jedoch kann man Abweichungen vom Normalgradienten um so genauer abschätzen, je genauer das Schwerefeld in der Umgebung bekannt ist, und hier bieten die erwarteten Ergebnisse von GOCE eine ausgezeichnete Chance.

Der Höheneffekt umschließt alle Einflüsse auf das Schwerefeld, die von der Massenverteilung der Erde abhängen. Zur Abschätzung setzen wir das Newtonsche Gravitationsgesetz voraus. Aus diesem folgt die Poisson-Gleichung $\nabla^2 U = 4\pi G \rho$ (Spezialfall $\rho=0$: Laplace-Gl. $\nabla^2 U = 0$). Die Dichtevariationen in der nächsten Umgebung der Messungen haben den größten Einfluss. Neben dem GOCE Schweremodell und der unabhängig gemessenen Topographie der Meeresoberfläche und des Meeresbodens, muss die Dichtestruktur der Kruste und des oberen Mantels berücksichtigt werden.

Vor konkreten Vorbereitungen eines solchen G-Experiments sind die Störeinflüsse eingehend zu untersuchen.

Proposal of a measurement of G with improved accuracy
Wolfgang Jacoby, Mainz

G is not very well known. According to National Institution of Standards and Technology, DODATA recommendation 2002: $G = 6.6742 \pm 0.001 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

The reasons are the weakness of gravitation and the smallness of the masses which can be realized in the laboratory or in natural experiments.

The possibility exists to obtain a higher precision and accuracy with an experiment in the ocean. A vertical profile of gravity through sea water at a number of depth stations could measure the effect of large bodies of water in the form of horizontal Bouguer slabs of density ρ between the station depths z . If depth is measured by pressure, it is also the water which provides the pressure. The two quantities, density ρ and depth interval Δz between two stations appear as the product $\rho \Delta z$ in the expressions for pressure and the Bouguer gravity effect and would cancel in the expression for G. This and the very high precision of gravity and pressure measurements would minimize their influence on the uncertainty of the result. This is especially important in the case of the uncertainty of water density (estimated 10^{-3}).

Observations: $\Delta z, \Delta p, \Delta g, g$

$$\Delta p = g \rho_w \Delta z, \quad \Delta g_w = 4\pi G \rho_w \Delta z \quad \Delta g_w / \Delta p = 4\pi G / g \quad G = \Delta g_w / \Delta p \times g / 4\pi$$

Example

$$\Delta g_w / \Delta p = 8.58 \cdot 10^{-11} \text{ ms}^{-2} / \text{Pa} \leftrightarrow 8.58 \cdot 10^{-6} \text{ mGal} / \text{Pa}$$

$$G = 8.58 \cdot 10^{-11} \times 9.81 / 4\pi = 6.698 \cdot 10^{-11} \text{ MKS}$$

One does not measure Δg_w but $\Delta g = g_2 - g_1$ between the stations 1 and 2 and $\Delta g \approx \Delta g_w + \Delta z \times 0.3086 + \Delta \delta g_{\text{anom}}$, i.e. the wanted effect plus the normal gravity increase with depth plus any anomalies or deviations from the normal earth. For example, the vertical gravity gradient $\partial g / \partial z$ may be disturbed by mass anomalies in the observation region. The task is to establish as well as possible all the disturbing effects.

An independent measurement of depth z or Δz would certainly help.

The relative measurement precision of g and p should reach 10^{-8} to 10^{-9} , and for Δg and Δp one may reach 10^{-5} to 10^{-6} . The true vertical gravity gradient $\partial g / \partial z$ or the deviation $\delta(\partial g / \partial z)$ from the normal value can be estimated from a good gravity model as that which will be provided by GOCE. Any other sources of error must be systematically estimated in their influence on the uncertainty of G and taken into account.

The height effect results from all mass influences which depend on the mass distribution. Density variations are, of course, the more important the closer to the gravity sensor they occur. Beside the GOCE gravity model and the independent sea surface topography, reasonable knowledge of the seafloor and the crust, a good earth model has to be combined with Newton's law and the Poisson and Laplace equations.