Bestimmung der Newtonschen Gravitationskonstanten G
(Stand 05.05.2010)

Manfred Schneider

Vorbemerkung

G ist bekanntlich eine ungemügend genau bestimmte Naturkonstante:

$$G = 6.6742 \pm 0.001 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} \mathrm{s}^{-2} \quad \textit{(CODATA 2002)}$$

Ergänzend zu dem Vorschlag von W. Jacoby, Mainz (der Website des GOCE-Projektbüros zu entnehmen) soll im Folgenden ein anderer Vorschlag gemacht werden, wobei es zunächst nur um das Prinzip geht, nicht um die konkrete Ausführung einer Neubestimmung von G.

Prinzip einer Neubestimmung von G

$$\begin{aligned}
&U_G(\mathbf{r},t) \quad \textit{Gravitationspotential}\\
&U_S(\mathbf{r},t) \quad \textit{Schwerepotential}\\
&U_Z \quad \textit{Potential der Fliehkraft}
\end{aligned}$$

Es ist

$$U_Z(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}(\mathbf{d}\times\mathbf{r})^2$$

$$U_S(\mathbf{r},t) = U_G(\mathbf{r},t) + U_Z(\mathbf{r},t)$$

und aus der Entwicklung des Gravitationspotentials nach Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned}
U_G(\mathbf{r},t) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} U_{G,lm}(\mathbf{r},t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} GM_{\otimes}\frac{a_{\otimes}^{l}}{r^{l+1}}P_l^m(\cos\vartheta)\left(C_{lm}\cos m\lambda + S_{lm}\sin m\lambda\right)\\
&= G\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} M_{\otimes}\frac{a_{\otimes}^{l}}{r^{l+1}}P_l^m(\cos\vartheta)\left(C_{lm}\cos m\lambda + S_{lm}\sin m\lambda\right)\\
\Rightarrow \hat{U}_G(\mathbf{r},t) &:= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} \hat{U}_{G,lm}(\mathbf{r},t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} M_{\otimes}\frac{a_{\otimes}^{l}}{r^{l+1}}P_l^m(\cos\vartheta)\left(C_{lm}\cos m\lambda + S_{lm}\sin m\lambda\right)
\end{aligned}$$

entnimmt man

$$U_G(\mathbf{r},t) = G \cdot \hat{U}_G(\mathbf{r},t) \ ,$$

woraus folgt

$$G = \frac{U_G(\mathbf{r},t)}{\hat{U}_G(\mathbf{r},t)} = \frac{U_S(\mathbf{r},t) - U_Z(\mathbf{r},t)}{\hat{U}_G(\mathbf{r},t)}$$

$$= \frac{U_S(\mathbf{r},t) - U_Z(\mathbf{r},t)}{\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} M_\otimes \frac{a_\otimes^l}{r^{l+1}} P_l^m(\cos\vartheta)(C_{lm}\cos m\lambda + S_{lm}\sin m\lambda)}$$

Darin wird entnommen

- aus Altimetrie $U_S(\mathbf{r},t)$
- aus Erdrotation $U_Z(\mathbf{r},t)$
- aus Gravitationsfeldbestimmung (CHAMP,GRACE,GOCE) $U_G(\mathbf{r},t)$

  \+ jeweils kinematische Bahnbestimmung $t, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

Das **Gravitationspotential** der Erde sei dargestellt durch

$$U_G(\mathbf{r}) =: GM_\otimes V(\mathbf{r})$$

$$mit \ \ dem \ \ Aufpunkt \ \ \mathbf{r} = (x,y,z)^T$$

Nach Cunningham gilt für seine $\Sigma - ten$ partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^\Sigma V(\mathbf{r})}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = \Re e\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} a_\otimes^l (C_{lm} - jS_{lm}) \frac{\partial^\Sigma V_{lm}(\mathbf{r})}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)$$

mit

$$\frac{\partial^\Sigma V_{lm}(\mathbf{r})}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = j^\beta \sum_{i=i}^{\alpha+\beta} \frac{(-1)^{\alpha+\gamma-i}}{2^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{(l-m+\gamma+2i)!}{(l-m)!} \cdot C_{\alpha\beta i} V_{l+\Sigma, m+\alpha+\beta-2i}$$

und

$$C_{\alpha\beta i} := \sum_k (-1)^k \binom{\alpha}{i-k}\binom{\beta}{k}$$

$$mit \quad \max(0; i-\alpha) \le k \le \min(\beta; i)$$

Die darin benötigten Funktionen $V(\mathbf{r})$ *und* $V_{lm}(\mathbf{r})$ sind nach Cunningham erklärt durch

$$V(\mathbf{r}) := \Re e\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} a_{\otimes}^{l}\left(C_{lm} - jS_{lm}\right)V_{lm}\right)$$

$$mit \quad j := \sqrt{-1}$$

$$V_{lm} := \frac{r^{l-m}\left(x+jy\right)^{m}}{r^{2l+1}} Z_{lm} \quad .$$

mit
$$Z_{lm}\left(z,\sigma^2\right) := \frac{(l+m)!}{2^l\, l!}\sum_{k=0}^{I\left(\frac{l-m}{2}\right)} \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{m+2k}{k}\binom{l}{m+2k} z^{l-m-2k}\sigma^{2k}$$

$$\sigma^2 := x^2 + y^2 \quad .$$

$$I\left(\frac{l-m}{2}\right) \; ganzzahliger \;\; Anteil \;\; von \;\; \frac{l-m}{2}$$

Führt man die Abkürzungen

$$A_{lm,i}^{\alpha\beta\gamma} := \frac{(-1)^{\alpha+\gamma-i}}{2^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{(l-m+\gamma+2i)!}{(l-m)!}$$

und

$$P_{lm,\Sigma}^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) := \frac{\partial^{\Sigma} V_{lm}(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}} = j^{\beta}\sum_{i=1}^{\alpha+\beta} A_{lm,i}^{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta i} V_{l+\Sigma,m+\alpha+\beta-2i}$$

$$mit \qquad \Sigma := \alpha+\beta+\gamma = 0,1,2,\ldots\infty$$

$$\alpha,\beta,\gamma = 0,1,\ldots\infty$$

ein, so erhält man die partiellen Ableitungen des Gravitationspotentials in der Gestalt

$$\frac{\partial^{\Sigma} U_G(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}} =: \frac{GM_{\otimes}\partial^{\Sigma} V(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}} = GM_{\otimes}\Re e\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} a_{\otimes}^{l}\left(C_{lm}-jS_{lm}\right)P_{lm,\Sigma}^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\right).$$

Sonderfälle:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} Potential \quad U_G \quad bzw. \ \dfrac{\partial^0 V}{\partial \mathbf{r}} = V \\ \\ Feldstärke \ \ \nabla_{\mathbf{r}} U_G \ bzw. \dfrac{\partial^1 V}{\partial \mathbf{r}} \\ \\ Gravitationstensor \ \ \nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}} U_G \quad bzw. \ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} Altimetrie \\ \\ Champ / Grace / Goce \\ \\ SGG \end{pmatrix}$$

Nutzung der SGG -Daten (+ Bahnbestimmung)

$$\frac{\partial^{\Sigma} U_G(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial z^{\gamma}} =: \frac{GM_{\otimes} \partial^{\Sigma} V(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial z^{\gamma}} = GM_{\otimes} \Re e\left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} a_{\otimes}^{l} \left(C_{lm} - jS_{lm} \right) P_{lm,\Sigma}^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) \right)$$

bzw.

$$G = \frac{\dfrac{\partial^{\Sigma} U_G(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial z^{\gamma}}}{M_{\otimes} \Re e\left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} a_{\otimes}^{l} \left(C_{lm} - jS_{lm} \right) P_{lm,\Sigma}^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) \right)} \Leftrightarrow \frac{SGG}{Feldbestimmung + B.B.}$$

$$G = \frac{\dfrac{\partial^{\Sigma} U_S(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial z^{\gamma}} - \dfrac{\partial^{\Sigma} U_Z(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial z^{\gamma}}}{M_{\otimes} \Re e\left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} a_{\otimes}^{l} \left(C_{lm} - jS_{lm} \right) P_{lm,\Sigma}^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) \right)} \Leftrightarrow \frac{Altimetrie + EOP}{Feldbestimmung + B.B.}$$

Darin kann bereitgestellt werden

$$N_0 := \Re e\left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} a_{\otimes}^{l} \left(C_{lm} - jS_{lm} \right) P_{lm,0}^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) \right) \quad Altimetrie$$

$$N_1 := \Re e\left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} a_{\otimes}^{l} \left(C_{lm} - jS_{lm} \right) P_{lm,1}^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) \right) \quad Feldbestimmung$$

$$N_2 := \Re e\left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} a_{\otimes}^{l} \left(C_{lm} - jS_{lm} \right) P_{lm,2}^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) \right) \quad Gradiometrie$$

so daß

$$G=\frac{\dfrac{\partial^{\Sigma}U_G(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}}{M_{\otimes}\Re e\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}a_{\otimes}^{l}\left(C_{lm}-jS_{lm}\right)P_{lm,\Sigma}^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\right)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\dfrac{\partial^{\Sigma}U_G(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}}{M_{\otimes}N_1}\\ \dfrac{\dfrac{\partial^{\Sigma}U_G(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}}{M_{\otimes}N_1}\\ \dfrac{\dfrac{\partial^{\Sigma}U_G(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}}{M_{\otimes}N_2}\end{pmatrix}$$

und eine zweite Variante gemäß

$$G=\frac{\dfrac{\partial^{\Sigma}U_S(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}-\dfrac{\partial^{\Sigma}U_Z(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}}{M_{\otimes}\Re e\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}a_{\otimes}^{l}\left(C_{lm}-jS_{lm}\right)P_{lm,\Sigma}^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\right)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\dfrac{\partial^{\Sigma}U_S(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}-\dfrac{\partial^{\Sigma}U_Z(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}}{M_{\otimes}N_1}\\ \dfrac{\dfrac{\partial^{\Sigma}U_S(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}-\dfrac{\partial^{\Sigma}U_Z(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}}{M_{\otimes}N_1}\\ \dfrac{\dfrac{\partial^{\Sigma}U_S(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}-\dfrac{\partial^{\Sigma}U_Z(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}}{M_{\otimes}N_2}\end{pmatrix}$$

Das sind drei Bestimmungsgleichungen für die Bestimmung von G und $M_{\otimes}$. Hinzu kommen Werte der Bestimmung ihres Produktes $\mu := GM_{\otimes}$ aus der Analyse von LAGEOS-Bahnen, aus LLR und interplanetaren Raumsonden. Aus terrestrischen Messungen u.a. mit Drehwaagen kann G alleine bestimmt werden, aber die sind eben bislang nicht gut genug.

Damit sollte eine G-Bestimmung möglich sein. Sie würde vor allem auch eine Kontrolle der Konsistenz der verschiedenen geodätischen Raumverfahren sein.